

Entornos virtuales para el aprendizaje de las matemáticas: análisis de una propuesta con tecnologías para la enseñanza de la geometría en el Programa de los Años Intermedios del IB

Magíster Marisel Rocío Beteta Salas, Colegio Hiram Bingham (Perú)

Resumen

La propuesta de esta investigación presenta un modelo de enseñanza de la geometría que incorpora recursos virtuales e integra la teoría de la enseñanza de la geometría de Van Hiele, la propuesta de enseñanza de la matemática del Programa de los Años Intermedios del Bachillerato Internacional) y el modelo TPACK, que integra el conocimiento pedagógico disciplinario, el conocimiento tecnológico disciplinario y el conocimiento tecnológico pedagógico. La validación de esta propuesta se sustenta en la ingeniería didáctica, la metodología que se emplea en las investigaciones en educación matemática.

Palabras clave: matemática, tecnología, geometría, enseñanza

Introducción

En la última década se vienen desarrollando en el ámbito educativo investigaciones referentes a la educación matemática. Desde la década de los setenta han aparecido teorías que proporcionan una mirada analítica a todos aquellos factores involucrados en el aprendizaje de la matemática. Han aparecido referentes como Yves Chevallard, Guy Brosseau, Juan Godino y Van Hiele, entre otros, que brindan las bases de las investigaciones en Educación Matemática en la actualidad.

La geometría es un componente de la matemática que ha pasado por cambios referentes a su enseñanza. La geometría demostrativa a través de corolarios, teoremas y teorías, ha sido desplazada por el álgebra. En 1995, la Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI, por su sigla en inglés), centró su estudio en las “perspectivas sobre la enseñanza de la geometría para el siglo XXI”, y destacó su preocupación por identificar los beneficios que conlleva utilizar recursos que permitan la manipulación y visualización de los objetos matemáticos, con el fin de restablecer a la geometría como un componente fundamental de la matemática.

La incorporación de recursos digitales en las clases de matemática ha dado lugar a nuevos modelos de enseñanza. En ellos, la tecnología se vuelve una herramienta que permitirá el desarrollo de habilidades matemáticas como la visualización, el análisis y el establecimiento de conjeturas a partir de la observación de diversos fenómenos que hoy en día se pueden simular con tecnología. La geometría dinámica ha cobrado un gran protagonismo en la enseñanza de la geometría. A través de recursos como Geogebra se puede potenciar el razonamiento geométrico, ya que permiten la construcción de los objetos matemáticos a partir de sus propiedades básicas.

La Teoría de Van Hiele toma en consideración cinco niveles de razonamiento, que deben alcanzarse de manera secuencial, pasando por el nivel 1 de visualización hasta alcanzar un nivel 5 de rigor. Además, propone que para que cada nivel que se logre, el maestro debe desarrollar una secuencia metodológica que sigue cinco fases. Esta teoría ha servido de marco teórico para sustentar la presente propuesta, que además tomará en cuenta el modelo TPACK para integrar las herramientas tecnológicas a la enseñanza de la geometría.

La metodología aplicada en la investigación corresponde a estudios de carácter cualitativo. El modelo es el que se emplea en las investigaciones en educación matemática; en este caso es la ingeniería didáctica, que sigue cuatro fases: estudio preliminar, análisis a priori, implementación y análisis a posteriori. En el estudio preliminar se revisaron las teorías de aprendizaje que sustentan la propuesta, así como los documentos del Bachillerato Internacional referentes a la enseñanza de la matemática y los documentos referentes al modelo TPACK. En el análisis a priori se diseñó la propuesta de enseñanza. La implementación se realizó en alumnos de primer año del PAI. Finalmente se realizó el análisis a posteriori, para luego brindar las conclusiones del estudio realizado.

Enseñanza de la geometría

Para comprender los fundamentos de la enseñanza de la geometría a través de las tecnologías es preciso comprender que la matemática requiere de una didáctica que involucra aspectos de su naturaleza como ciencia.

Yves Chevallard, licenciado en matemática e investigador en Didáctica de la Matemática, expresa que existe una estrecha relación entre el objeto a saber, denominado también saber sabio, y el saber enseñado. Chevallard, (1998) señala que quien enseña matemáticas se interesa en el trabajo que se puede observar entre un docente, los alumnos y un saber matemático, y denomina transposición didáctica al proceso donde se contemplan requisitos didácticos específicos que conoce el maestro, quien va a llevar a cabo el proceso de transformación de saber sabio a un saber enseñado. Cardelli (2004) comenta con referencia al proceso de enseñanza que debe haber un vínculo estrecho entre el objeto que se va a enseñar y el proceso didáctico con el que se pretende llegar al saber enseñado.

En un proceso didáctico intervienen tres elementos básicos que son: el maestro, el estudiante y la disciplina que se pretende impartir. La transposición didáctica que sustenta Chevallard se refiere a la relación que existe entre la disciplina que se va a enseñar y el docente. Este proceso está vinculado a la enseñanza, en cuanto a la relación existente en el proceso didáctico entre la disciplina que se va a enseñar y el estudiante, que hace referencia al proceso de aprendizaje. Para terminar esta relación entre los elementos básicos, Chevallard hace referencia también a la relación entre el maestro y el estudiante a través del contrato didáctico, que regula el funcionamiento de las clases y la relación entre docente, estudiante y saber. Todas estas relaciones entre estos tres elementos las apreciamos en el siguiente gráfico:



Figura 1: Proceso didáctico, según Yves Chevallard

Se entiende que se requiere de un conocimiento didáctico sobre la disciplina que se pretende enseñar para llevar a cabo un correcto proceso de enseñanza, como también diseñar y dar seguimiento al proceso de aprendizaje del alumno; es pertinente e importante en esta investigación dar a conocer la teoría que sostiene el aprendizaje de la geometría y brinda la pauta metodológica que deben seguir los docentes en el diseño de sus actividades de enseñanza aprendizaje.

La Teoría de Van Hiele

El aprendizaje de la geometría implica aspectos particulares como la capacidad de describir objetos del entorno para luego asociarlos y construir una estructura más compleja comprendiendo las propiedades de cada uno de los objetos que lo conforman. Los esposos Van Hiele, de nacionalidad holandesa, comprendieron que para aprender geometría se debían trabajar las capacidades matemáticas por niveles de razonamiento, que implican que una persona desarrolle antes de un razonamiento formal abstracto un razonamiento intuitivo.

La teoría de Van Hiele está conformada por dos componentes: los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje con las que el docente debe diseñar sus actividades de aprendizaje dirigidas al trabajo que va a realizar en uno de los niveles de razonamiento.

Los niveles de razonamiento son cinco: Nivel 1, visualización o reconocimiento; Nivel 2, análisis; Nivel 3, ordenación y clasificación; Nivel 4, deducción formal y Nivel 5, rigor.

Sobre las características de cada uno de estos niveles, Fouz y Donosti (2005) mencionan:

Nivel 1: visualización o reconocimiento

- Cada objeto se describe como una unidad, sin diferenciar componentes.
- Se describe por su apariencia física, con un lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.
- No reconocen de forma explícita componentes y propiedades de los objetos.

Nivel 2: análisis

- Se perciben los componentes y propiedades, a través de la observación y de la experimentación.
- De una manera informal pueden describir objetos por sus propiedades, pero no relacionar unas propiedades con otras. Aún no se pueden elaborar definiciones.
- Experimentando se pueden establecer nuevas propiedades.
- No realizan clasificaciones de objetos a partir de sus propiedades.

Nivel 3: ordenación y clasificación

- Se describen las figuras de manera formal. Esto es importante, pues conlleva entender el significado de las definiciones.
- Realizan clasificaciones lógicas de manera formal, lo que significa que reconocen cómo unas propiedades se derivan de otras, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones.
- Siguen las demostraciones, pero, en la mayoría de los casos, no las entienden en cuanto a su estructura. Esto se debe a que en su nivel de razonamiento lógico todavía no pueden asimilarla en su globalidad. Esta carencia les impide captar la naturaleza axiomática de la geometría.

Nivel 4: deducción formal

- En este nivel ya se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales.

- Se comprenden y manejan las relaciones entre propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos.
- Se comprende cómo se puede llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas, lo que permite entender que se puedan realizar distintas formas de demostraciones para obtener un mismo resultado.

Nivel 5: rigor

- Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos.
- Se puede trabajar la geometría de manera abstracta sin necesidad de ejemplos concretos, con lo cual se alcanza el más alto nivel de rigor matemático.

Es importante señalar que estos niveles tienen en conjunto tres características muy importantes. La primera es que los niveles son **secuenciales**, es decir que existe una jerarquización para poder pasar de un nivel a otro; la otra característica es el **lenguaje**: el paso de un nivel a otro implica adquirir una mejor comunicación matemática que parte de descripciones sencillas y llega hasta el manejo axiomático de la matemática; la tercera característica es que el paso de un nivel a otro es **continuo y discreto**. Las habilidades se van desarrollando y alcanzando gradualmente.

Las fases de aprendizaje pretenden organizar metodológicamente las actividades de enseñanza-aprendizaje. Estas son cinco, según Bedoya, Duarte y Vasco (2007):

Fase 1: información. El docente explora la información que tienen los estudiantes en su estructura cognitiva sobre el objeto de estudio.

Fase 2: orientación dirigida. El docente diseña actividades en las que el objeto de estudio se relacione con situaciones de la vida diaria, para que los alumnos encuentren sus propias relaciones.

Fase 3: explicitación. Los alumnos aplican el concepto del objeto de estudio para resolver problemas que correspondan a situaciones reales en diferentes contextos.

Fase 4: orientación libre. Partiendo del concepto estudiado y de los intereses propios de los alumnos, ellos formulan y solucionan sus propios problemas.

Fase 5: integración. El concepto estudiado se reorganiza y adquiere un nuevo significado. Es entonces que se hacen explícitas la nueva red conceptual y el conjunto de habilidades de razonamiento adquiridas.

A través de los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje de la teoría de Van Hiele, la investigación sustenta el aspecto metodológico del diseño de actividades propuesto. Es importante también mencionar que el docente, antes de empezar el diseño de actividades dirigidas al logro de un nivel de razonamiento, debe tener la seguridad de que el nivel anterior haya sido logrado. Para ello se recomienda tomar una prueba diagnóstica partiendo de los descriptores de nivel de razonamiento que se van a evaluar.

La enseñanza de la geometría en el PAI

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en el Programa de los Años Intermedios está enmarcado en un currículo basado en la indagación. Es a través de las matemáticas que se busca proporcionar a los alumnos los conocimientos, la comprensión y las habilidades intelectuales necesarias para prepararlo, y estas contribuyen al desarrollo de la investigación y a que se desempeñe eficientemente en la vida en general.

“La indagación implica especular, explorar, cuestionar y establecer conexiones. En todos los programas del IB, la indagación estimula la curiosidad y favorece el pensamiento crítico y creativo”. (Organización del Bachillerato Internacional, 2015, p. 20).

En la enseñanza y el aprendizaje a través de la indagación se debe tomar en consideración el desarrollo de la comprensión conceptual de contextos globales. Las actividades de aprendizaje deben tener como fin responder a un enunciado de la indagación. Para ello se generan preguntas de indagación que facilitarán explorar los temas. Al indagar se desarrollan habilidades disciplinarias e interdisciplinarias específicas de los Enfoques del aprendizaje.

La comprensión de un **concepto** como una idea importante permitirá a los estudiantes formular principios, generalizaciones y teoría. Los conceptos serán los medios para explorar la esencia de las matemáticas. La *Guía de Matemáticas* del PAI menciona tres conceptos clave que servirán para dar el enfoque interdisciplinario e intradisciplinario. Estos conceptos son: forma, lógica y relaciones. Además de ellos se hace mención en la guía de los conceptos relacionados, que permitirán profundizar y lograr una comprensión más compleja y sofisticada. Estos conceptos son: cambio, cantidad, equivalencia, espacio, generalización, justificación, medición, modelos, patrones, representación, simplificación y sistemas.

Los contextos globales servirán como marco a través del cual los alumnos encontrarán el punto de partida de la indagación o hacia donde van a dirigir todo lo aprendido a través de los conceptos.

Los docentes deben identificar el contexto global que permitirá comprender por qué el proceso de indagación resulta importante. La *Guía de Matemáticas* del PAI propone algunos contextos como las identidades y las relaciones, la orientación en el espacio y el tiempo, la expresión personal y cultural y la innovación científica y técnica, entre otros, y deja la posibilidad de que se propongan otros contextos que estén relacionados con el objetivo de la asignatura.

Los enunciados de indagación permitirán diseñar el proyecto de aprendizaje dirigido a la comprensión de los conceptos. En la tabla 1 se muestran dos enunciados de indagación que permiten desarrollar proyectos dirigidos al aprendizaje de la geometría.

Tabla 1: Enunciados de indagación y proyectos dirigidos al aprendizaje de la geometría.

Enunciado de la indagación	Concepto clave Conceptos relacionados Contexto global	Posible proyecto o estudio
Los arquitectos e ingenieros deben utilizar recursos finitos de manera responsable al diseñar nuevas estructuras.	<ul style="list-style-type: none"> • Forma • Espacio, cantidad • Equidad y desarrollo 	Geometría: volumen

La comprensión de la forma y la figura favorece la creatividad.	<ul style="list-style-type: none"> • Forma • Patrones, espacio • Expresión personal y cultura 	Geometría: transformaciones
La tecnología nos permite reproducir formas para diseñar creativas figuras.	<ul style="list-style-type: none"> • Forma • Espacio, representación. • La innovación científica y técnica 	Geometría: polígonos

A través de los enunciados de indagación se formularán las preguntas de indagación que guiarán el desarrollo de la propuesta de enseñanza-aprendizaje. En la tabla 2 se muestran las preguntas de indagación respecto al tercer enunciado de indagación de la Tabla 1.

Tabla 2: Preguntas de indagación respecto al enunciado de indagación

Preguntas fácticas: recordar datos y temas	Preguntas conceptuales: analizar ideas importantes	Preguntas debatibles: evaluar perspectivas y desarrollar teorías
<p>¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro de un polígono?</p> <p>¿En qué unidades de medida se expresa el área de un polígono?</p>	<p>¿Qué propiedades tiene un polígono?</p> <p>¿Cómo se calcula el espacio que ocupa un polígono?</p>	<p>¿Cuál es la diferencia entre encontrar el espacio ocupado por un polígono y el espacio ocupado por un sólido geométrico?</p>

En toda propuesta de aprendizaje que va dirigida al PAI se deben considerar además los Enfoques del aprendizaje, que se encuentran agrupados en cinco categorías de acuerdo con las habilidades que se pretende desarrollar: habilidades de pensamiento, habilidades sociales, habilidades de comunicación, habilidades de autogestión y habilidades de investigación.

Son cuatro los criterios de evaluación que se desprenden de los objetivos específicos que tiene la asignatura de Matemáticas: conocimiento y comprensión, investigación de patrones, comunicación y aplicación de las matemáticas en contextos de la vida real. El docente del PAI, al diseñar actividades de aprendizaje, tomará en cuenta estos criterios, cuyas rúbricas para evaluar se encuentran en la *Guía de Matemáticas* del PAI.

En resumen, en este apartado se han dado a conocer los lineamientos generales que se deben tomar en consideración al estructurar una propuesta de enseñanza-aprendizaje dirigida al PAI. Respecto a lineamientos específicos para la rama de geometría, el PAI contempla: “El estudio de la geometría y la trigonometría contribuye al desarrollo de la noción de espacio y ofrece a los alumnos las herramientas necesarias para analizar, medir y transformar cantidades geométricas en dos y tres dimensiones”. (Organización del Bachillerato Internacional, 2015, p. 30)

En la *Guía de Matemáticas* del PAI están propuestos los temas para desarrollar a lo largo de los cuatro años del programa. Los docentes diversificarán estos temas en cada uno de los grados, y es importante tomar en cuenta una base teórica de aprendizaje y una metodológica pertinente que responda a los objetivos de la asignatura.

Herramientas digitales para la enseñanza de la geometría

Respecto al uso de tecnologías, el IB menciona en la *Guía de Matemáticas* del PAI: “Las TIC ofrecen una amplia variedad de recursos y aplicaciones que los profesores pueden explorar a fin de mejorar la enseñanza y el aprendizaje. En Matemáticas, pueden utilizarse como herramienta para realizar cálculos complejos, resolver problemas, dibujar gráficos e interpretar y analizar datos”. Organización del Bachillerato Internacional, 2015, p. 33).

En la enseñanza de la geometría, la tecnología ofrece herramientas que permitirán explorar e indagar sobre sus elementos y propiedades, lo que posibilita la comprensión de conceptos como forma, espacio, representación y cantidad, entre otros.

Entre las herramientas que se destacan respecto a su uso relacionado con la geometría se encuentra Geogebra, una herramienta libre que puede descargar el docente de la Web o trabajarla en línea desde su computador.

A través de Geogebra, los alumnos construyen objetos matemáticos complejos sobre la base de su noción y propiedades, por ejemplo: el alumno debe comprender que para generar un triángulo unirá tres puntos consecutivos no alineados a través de segmentos.

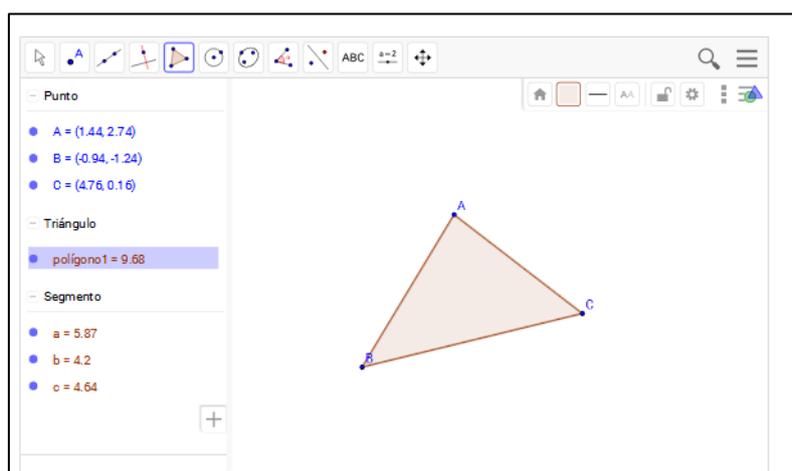


Figura 2: Construcción del polígono ABC

Geogebra permite explorar propiedades como por ejemplo la de generalizar que la suma de los ángulos internos de los triángulos es 180° , a partir de la exploración de diversos tipos de triángulos.

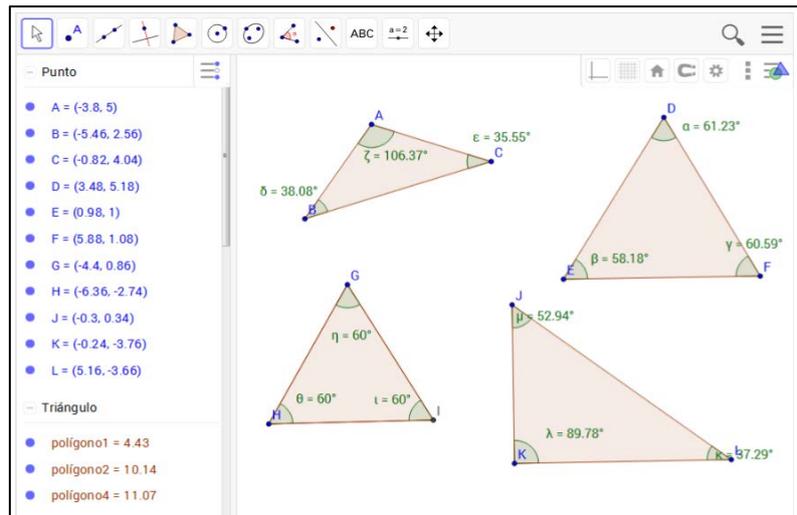


Figura 3: Construcción de triángulos y visualización de ángulos interiores.

También se puede contar con otros recursos para trabajar en geometría, a través de aplicaciones que promueven el aprendizaje colaborativo, como Google App para la Educación, herramientas de la Web 2,0 (blog, mapas conceptuales en línea, foros, videos, redes sociales, etc.). Diseñar sesiones de clase con estas herramientas es una de las competencias que debe tener un docente del siglo XXI.

Metodología TPACK

Dado un marco teórico para el aprendizaje de la geometría y la visión referente al aprendizaje de la matemática que tiene el Programa de los Años Intermedios (PAI) restaría sustentar la propuesta pedagógica en lo que se refiere a la aplicación de tecnologías.

Por muchos años se han utilizado herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza aprendizaje. Las investigaciones al respecto daban a conocer que las herramientas TIC motivaban a los estudiantes a explorar nuevos conocimientos y permitían desarrollar habilidades de análisis, indagación y creatividad, entre otras. Haciendo establecido que las TIC son herramientas de apoyo para el aprendizaje, haría falta una metodología que establezca la pauta para el diseño de actividades de enseñanza-aprendizaje.

Se establece entonces la metodología TPACK, que se basa en el conocimiento que puede tener el docente respecto a la materia misma, los procedimientos pedagógicos y las herramientas de TIC que va a utilizar en su propuesta de enseñanza.

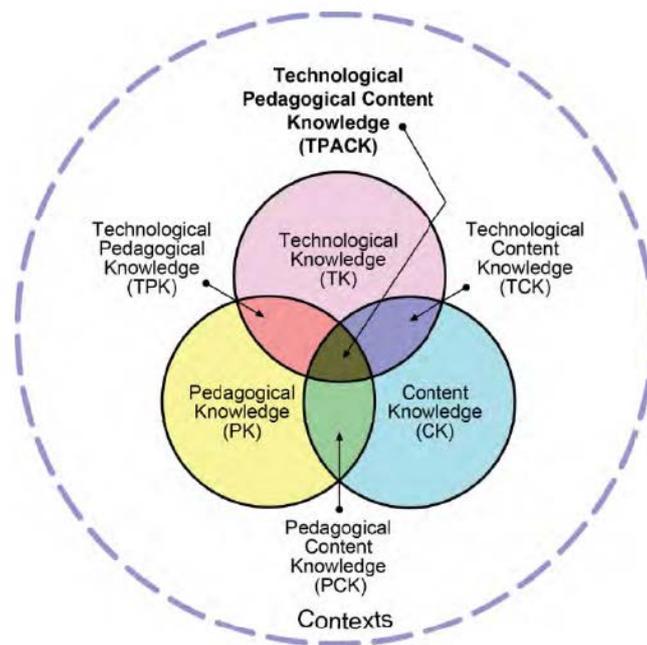


Figura 4: Modelo TPACK

Este modelo sostiene que para plantear actividades de enseñanza-aprendizaje, el docente debe tener presente: el conocimiento pedagógico disciplinario, el conocimiento tecnológico disciplinario y el conocimiento tecnológico pedagógico.

El conocimiento pedagógico disciplinario hace referencia a la trasposición didáctica que se ha abordado en esta investigación, que sustenta los procesos que el docente usará con el propósito de transformar el saber sabio en un saber enseñado. En esta investigación, el conocimiento pedagógico respecto al aprendizaje de la geometría se sustenta en la teoría de aprendizaje de Van Hiele.

El conocimiento tecnológico disciplinario es aquel que permite reconocer y utilizar a las herramientas tecnológicas idóneas para los fines de enseñanza. En esta investigación se considera a Geogebra como una herramienta tecnológica que permitirá el desarrollo de habilidades para la comprensión de conceptos y propiedades de objetos matemáticos referidos a temas de geometría.

El conocimiento tecnológico pedagógico es aquel que permite la comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje a través de la tecnología. Para ello, el docente tiene el conocimiento de las estrategias adecuadas de acuerdo con las herramientas que implementará en su clase. Hoy en día se ha aplicado a las ya conocidas teorías del aprendizaje, como el Conductismo, el Cognitismo y el Constructivismo, una teoría de aprendizaje que emerge de la necesidad de comprender el proceso de aprendizaje en la era digital. Esta teoría se conoce como Colectivismo, y está basada en reconocer y conectar, entendiendo el aprendizaje como la conexión a través de nodos (conexión de varios elementos) en un contexto tecnológicamente enriquecido donde se aprende de manera colaborativa.

Combinados estos tres conocimientos, que son la base de una enseñanza efectiva con incorporación de tecnologías, obtenemos el conocimiento tecnológico pedagógico disciplinario (TPACK). Harris y Hofer proponen un diseño pedagógico que tome en cuenta: la actividad, la descripción de la actividad y las tecnologías compatibles para llevarla a cabo. (Harris y Hofer, 2011)

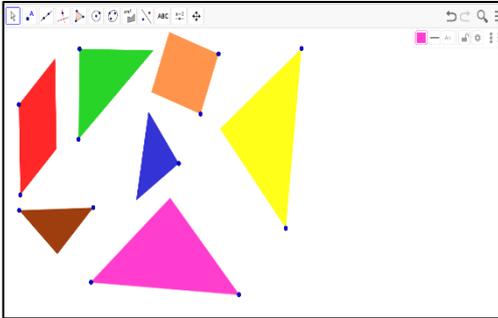
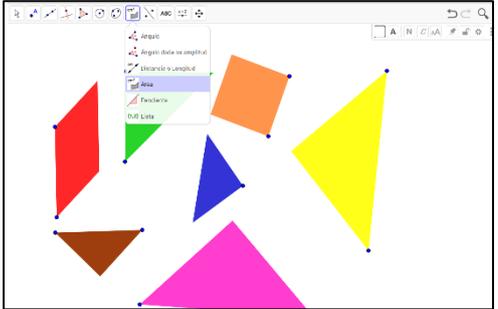
Diseño de propuesta pedagógica para el aprendizaje de la geometría en entornos digitales

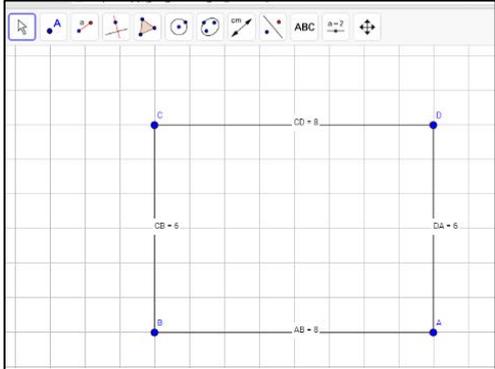
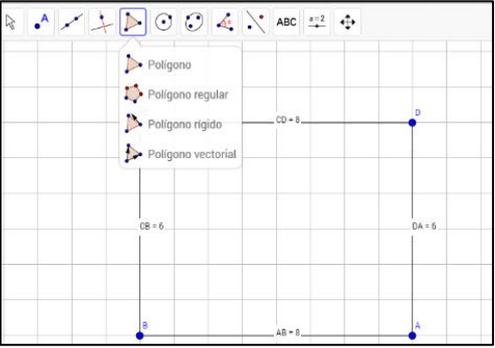
El diseño de la propuesta que se presenta en esta investigación se sustenta entonces en tres elementos pedagógicos: la teoría del aprendizaje de Van Hiele, el diseño de actividades de aprendizaje propuesto por el PAI y la metodología TPACK.

Asignatura:		Grado del PAI:	
Enunciado de indagación			
Concepto clave		Concepto relacionado:	
Contexto global			
Preguntas		Fáctica:	
		Conceptual:	
		Debatible:	
Nivel de razonamiento	Fase metodológica	Descripción de la actividad	Tecnología compatible

Tomando un tema del Currículo PAI:

Asignatura: <i>Matemáticas</i>		Grado del PAI: <i>Grado 7</i>	
Tema: <i>Áreas de polígonos</i>			
Enunciado de indagación: <i>La tecnología nos permite reproducir formas para diseñar creativas figuras.</i>			
Concepto clave: <i>Forma</i>		Conceptos relacionados: <i>espacio, representación</i>	
Contexto global: <i>La innovación científica y técnica</i>			
Preguntas		Fáctica: <i>¿Cuál es la diferencia entre el área y el perímetro de un polígono? ¿En qué unidades de medida se expresa el área de un polígono?</i>	
		Conceptual: <i>¿Cómo se calcula el espacio que ocupa un polígono?</i>	
		Debatible: <i>¿Cuál es la diferencia entre encontrar el espacio ocupado por un polígono regular y un polígono irregular?</i>	

Nivel de razonamiento	Fase metodológica	Descripción de la actividad	Tecnología compatible
Nivel 1: visualización	Información	<p>Construir a través de Geogebra los siguientes polígonos: un triángulo escaleno, un cuadrilátero (rectángulo) y un polígono de 5 lados.</p> <p>Pida a los estudiantes que utilicen el software para calcular el perímetro y área de estas figuras.</p> <p>Pregunte a los estudiantes: <i>¿En qué unidades de medida se expresa el perímetro y área?</i> <i>¿Qué expresa el área y qué expresan el perímetro?</i></p>	Geogebra
Nivel 2: análisis	Orientación dirigida	<p>Abrir el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/gcTXE TK9</p> <p>Con ayuda de Geogebra, calcular el área de cada una de las piezas del tangram.</p>  <p><i>Figura 5: Piezas de Tangram</i></p>  <p><i>Figura 6: Área de piezas de Tangram</i></p>	https://www.geogebra.org/m/gcTXE TK9

<p>Nivel 2: análisis</p>	<p>Explicitación</p>	<p>Construcción de un polígono irregular: En Geogebra, construir un rectángulo con estos lados:</p> <p>AB = 8 CM BC = 6 CM CD = 8 CM AD = 6 CM</p>  <p><i>Figura 7: Construcción de lados del rectángulo ABCD</i></p> <p>Con ayuda de la herramienta Polígono, generar el polígono ABCD haciendo clic en cada uno de los vértices A, B, C y D.</p>  <p><i>Figura 8: Construcción de polígono ABCD</i></p> <p>Indicar a los alumnos que hallen el área del rectángulo de lados de 4 cm y 6 cm con la herramienta que posee Geogebra.</p>	<p>Geogebra</p>
------------------------------	----------------------	---	-----------------

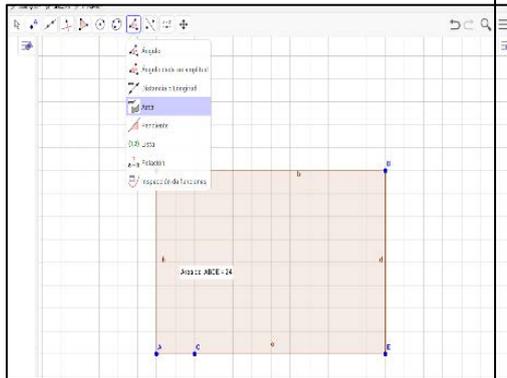


Figura 9: Área del cuadrilátero ABCD

Con la ayuda de la herramienta, elija y mueva, haga clic en los vértices y obtenga la siguiente figura:

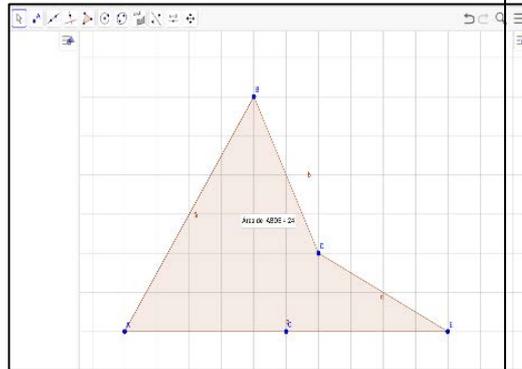
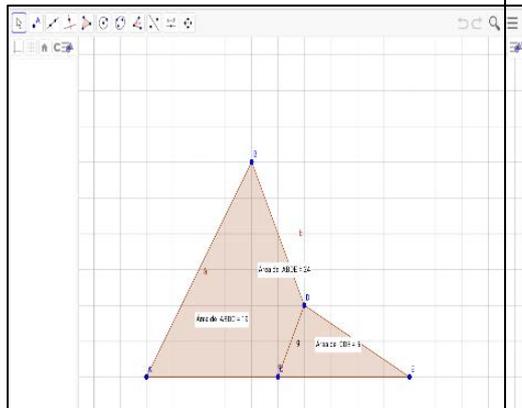
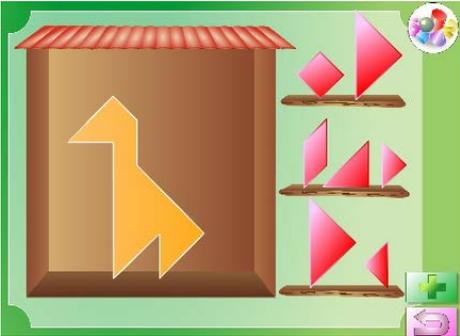
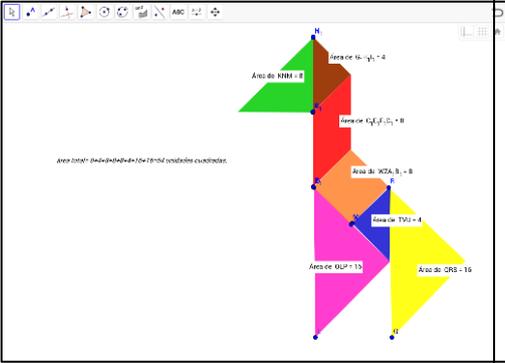


Figura 10: Movimiento del cuadrilátero ABCD

Cuestionar: ¿Qué estrategia se debe emplear para calcular el área de esta figura? Guiar a los alumnos a que deduzcan que deben descomponer la figura.



		<p><i>Figura 11: Área del cuadrilátero ABCD y del triángulo DCE</i></p>	
<p>Nivel 2: análisis</p>	<p>Orientación libre</p>	<p>Trabajar con el Tangram</p> <p>Abriendo el recurso digital, se pide a los alumnos que completen las cinco figuras que propone el programa.</p> <p>http://primerodecarlos.com/junio/tangram.swf</p>  <p><i>Figura 12: Piezas de Tangram y figura para armar.</i></p> <p>Luego se les pide que hallen el área de cualquiera de las figuras que hayan obtenido.</p> <p>Para ello usarán el recurso TanGram interactivo que Geogebra ofrece:</p> <p>https://www.geogebra.org/m/gcTXE TK9</p>  <p><i>Figura 13: Área del polígono irregular.</i></p>	<p>Tangram interactivo</p> <p>http://primerodecarlos.com/junio/tangram.swf</p> <p>https://www.geogebra.org/m/gcTXE TK9</p>

<p>Nivel 2: análisis</p>	<p>Integración</p>	<p>Para el cierre de la propuesta se le pide resolver con ayuda de los medios TIC utilizados la siguiente actividad:</p> <p>Se cuenta con un terrero de forma rectangular de 30 metros de largo por 40 metros de ancho.</p> <p>Se desea brindar una propuesta de distribución de un apartamento de manera que este cuente con:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1 sala 1 comedor 1 cocina 2 baños 3 dormitorios 1 lavandería 1 terraza <p>Utilizar Geogebra para mostrar la distribución del apartamento, indicando el área de las habitaciones y de los pasadizos.</p>	



Figura 14: Plano de distribución de área de 54 m²

Análisis a priori y a posteriori

La propuesta se implementó con alumnos del primer año del PAI.

Fases de Van Hiele	Análisis a priori	Análisis a posteriori
Información	<ul style="list-style-type: none"> Con ayuda del software Geogebra calculan el área y el perímetro de un triángulo escaleno, un cuadrilátero (rectángulo) y un polígono de 5 lados. 	<ul style="list-style-type: none"> Los alumnos muestran que calculan sin dificultad el área y perímetro de las figuras indicadas. Describen por su apariencia a los objetos geométricos con un lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto. Se corrobora que los alumnos han alcanzado el Nivel 1 de razonamiento de Van Hiele.
Orientación Dirigida	<ul style="list-style-type: none"> Con Geogebra calculan el área de cada una de las piezas del Tangram. Con el área de cada una de las piezas del Tangram, establecen relaciones entre las piezas del tangram. Por ejemplo, una pieza es el doble de otra pieza. 	<ul style="list-style-type: none"> Calculan el área de cada una de las piezas sin dificultad. En un principio les tomó un tiempo encontrar relaciones entre las figuras. Realizan clasificaciones lógicas de manera formal, lo que significa que reconocieron propiedades, estableciendo relaciones entre propiedades y las consecuencias de esas relaciones: un triángulo es congruente a otro. Un triángulo también puede ser semejante a otro ya que sus lados son proporcionales.
Explicitación	<ul style="list-style-type: none"> Con Geogebra, construyen un cuadrilátero rectángulo con estos lados: largo 8 cm y ancho 6 cm, y luego calculan su área. Modifican el rectángulo a otro polígono de la misma área. Plantean una estrategia de solución para hallar el área a partir de la descomposición del polígono en otros polígonos como triángulos, trapecios u otros. 	<ul style="list-style-type: none"> Construyen el rectángulo con las medidas dadas sin dificultad y calculan su área. Tienen ciertas dificultades para comprender la indicación de modificar la figura manteniendo el valor del área. Debatan sobre las figuras que deben utilizarse para descomponer la figura irregular. Se presentan varias alternativas. Comprueban que la estrategia utilizada es la efectiva.
Orientación libre	<ul style="list-style-type: none"> Forman diversas figuras con ayuda de las piezas de tangram y comprueban que el área de las diversas figuras formadas es constante. 	<ul style="list-style-type: none"> Reconocen cómo unas propiedades se derivan de otras. La estrategia utilizada es comprobada.
Integración	<ul style="list-style-type: none"> Diseñan el plano de distribución para un apartamento dada el área total. Calculan el área de cada una las habitaciones y espacios que tendrá el apartamento. 	<ul style="list-style-type: none"> Con ayuda de Geogebra, diseñan el plano de distribución, mostrando el área de cada una de las habitaciones y los espacios entre las habitaciones. Debatan sobre la mejor propuesta de distribución de manera que priorice

		aquella donde se optimiza mejor el espacio total.
--	--	---

Conclusiones

- Las estrategias empleadas en la propuesta para el aprendizaje de la geometría demuestran que es posible integrar el conocimiento pedagógico, el conocimiento de la materia que se va a enseñar y el conocimiento en herramientas tecnológicas en innovadoras propuestas de aprendizaje.
- Al implementar las herramientas tecnológicas en el diseño metodológico de Van Hiele se logró desarrollar y fortalecer el nivel 2 (análisis) de los alumnos. A través de Geogebra se possibilitó que los alumnos reconocieran y comprendieran las propiedades de los objetos matemáticos, como el área y el perímetro de un polígono.
- El buen uso y adecuada implementación de los recursos tecnológicos hacen posible generar estrategias de enseñanza-aprendizaje que permiten desarrollar el razonamiento geométrico. En la investigación realizada se corrobora el desarrollo de estrategias para fortalecer el Nivel 1, de visualización, de Van Hiele, así como también el Nivel 2 de análisis.
- A través de la geometría dinámica, los alumnos demostraron y comprobaron las propiedades de diversos objetos matemáticos. A través de la propuesta se logró la comprensión del área de polígonos irregulares mediante la suma de las áreas de cuadriláteros y triángulos, integrando estos conocimientos y estrategias para solucionar problemas en un contexto real.

Referencias

- ARTIGUE, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá (Colombia): Grupo Editorial Iberoamericana S. A. de CV, 1995.
- BEDOYA, J.; Duarte, P. y Vasco, E. “Fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele y su aplicación al concepto de aproximación local”. En *Lecturas Matemáticas*, 2007, vol. 28. 77-95.
- CARDELLI, J. “Reflexiones críticas sobre el concepto de transposición didáctica de Chevallard”. En *Cuadernos de Antropología Social*, 2004, vol. 19. 49-61.
Disponible en http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=s1850-275x2004000100004.
- CHEVALLARD, Y. “La transposición didáctica”. En *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. 1998. 1-67).
- FARIA, Edison de. “Ingeniería didáctica”. En *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. 2006, n.º 2.
- FOUZ, F. y Donosti, Berritzegune de. “Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría”. En los documentos del ciclo de conferencias *Un paseo por la*

geometría, 2004-2005, 67-82.

HARRIS, J. B. y Hofer, M. J. “Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) in Action: A Descriptive Study of Secondary Teachers’ Curriculum-Based, Technology-Related Instructional Planning”. En *Journal of Research on Technology in Education*. 2011, 43 (3), 211-229.
<http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ918905.pdf>

LEÓN ROLDÁN, Teresa. *Concepción didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la educación primaria*. La Habana (Cuba): Editorial Universitaria, 2008.

MALASPINA, U. y Bazán, J. “Enseñanza de la matemática en la secundaria. Un análisis preliminar de las percepciones de ingresantes a la PUCP”. En *Educación*, 2007, vol. 16, n.º 31. 7-27.

ORGANIZACIÓN DEL BACHILLERATO INTERNACIONAL. *Guía de Matemáticas*. Reino Unido: International Baccalaureate Organization Ltd., 2015.

VILLEGAS, Francisco. “TIC y Matemáticas”. En *Revista iberoamericana de educación matemática Unión*, 2007, vol. 9, 149-163.